الثانية ب ع ت	النهايات و الإتصال ملخص الدرس	ح.بوعيون

I) تذكير

1) الأشكال الغير محددة:

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty\times 0$	$+\infty-\infty$

2) العمليات على النهايات الغير منتهية:

$+\infty+a=+\infty$

$-\infty+a=-\infty$

$+\infty+\infty=+\infty \quad (a\in\mathbb{R})$

$-\infty-\infty=-\infty$

ش غ محدد $+\infty-\infty$

$a\times\infty=\infty \quad (a\neq 0)$

$\infty\times\infty=\infty$

ش غ محدد $0\times\infty$

$\frac{a\neq 0}{0}=\infty \quad \frac{a}{\infty}=0 \quad \frac{\infty}{a}=\infty$

ش غ محدد $\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$

3) بعض التقنيات لحساب نهاية دالة لا جذرية:

a) $\lim_{\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ ⟵ التعميل.

b) $\lim\left(f(x)+g(x)\right)=+\infty-\infty$

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ متقابلين ⟵ المرافق.

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ غير متقابلين ⟵ التعميل.

c) $\lim_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a-a}{0}=\frac{0}{0} \quad (a\neq 0)$ ⟵ المرافق.

d) $\lim_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0+0}{0}=\frac{0}{0} \quad (a\neq 0)$ ⟵ التفكيك ثم ربما المرافق.

e) ملاحظة: $\sqrt{x^2}=|x|$ ؛ $\begin{cases} x=\sqrt{x^2}\ ; x\ge 0 \\ x=-\sqrt{x^2}\ ; x\le 0\end{cases}$

4) نهايات اعتيادية.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}$$

5) الاتصال.

a) لكي نبين أن f متصلة في x_0 نقوم بحساب $\lim_{x_0} f(x)$ إذا وجدنا أن $\lim_{x_0} f(x)=f(x_0)$ فإن f متصلة في x_0 .

b) إذا كانت f دالة لا تحتوي على الجزء الصحيح وغير معرفة بأجزاء فإنها متصلة على حيز تعريفها لأنها مركب دوال متصلة في غالب الأحيان.

6) التمديد بالاتصال

لتكن f دالة غير معرفة في x_0 ، لكي نبين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في x_0 نقوم بحساب $\lim_{x_0} f(x)$ إذا وجدنا $\lim_{x_0} f(x)=l\in\mathbb{R}$ فإن f تقبل تمديدا g بالاتصال في x_0 معرف بما يلي: $\begin{cases} g(x)=f(x)\ ,x\neq x_0 \\ g(x_0)=l\end{cases}$

7) النهايات والترتيب.

a) إذا كان $|f(x)-l|\le g(x)$ بجوار x_0 و $\lim_{x_0} g(x)=0$ فإن $\lim_{x_0} f(x)=l$

b) إذا كان $f(x)\le g(x)$ بجوار x_0 و $\lim_{x_0} f(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x_0} g(x)=+\infty$

c) إذا كان $f(x)\le g(x)$ بجوار x_0 و $\lim_{x_0} g(x)=-\infty$ فإن $\lim_{x_0} f(x)=-\infty$

d) إذا كانت $g(x)\le f(x)\le h(x)$ بجوار x_0 و $\lim_{x_0} g(x)=\lim_{x_0} h(x)=l$ فإن $\lim_{x_0} f(x)=l$

II) صورة مجال بدالة متصلة.

1) a) صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.

b) صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

2) a) إذا كانت f متصلة وتزايدية فإن:

*) $f([a,b])=[f(a),f(b)]$ *) $f(]a,b])=]\lim_{a^+} f, f(b)]$.

b) إذا كانت f متصلة وتناقصية فإن:

*) $f([a,b])=[f(b),f(a)]$ *) $f(]a,b[)=]\lim_{b^-} f,\lim_{a^+} f[$.

3) مبرهنة القيم الوسيطية

a) إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و λ عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن $(\exists c\in[a,b]): f(c)=\lambda$

b) إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a)\cdot f(b)<0$ فإن $(\exists c\in]a,b[): f(c)=0$

يعني المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا في $]a,b[$

ملاحظة: *) إذا كان $f(a)\cdot f(b)\le 0$ فإن $c\in[a,b]$.

*) إذا كانت f رتيبة قطعا فإن العدد c وحيد.

III) الدالة العكسية

1) إذا كانت:

*) f متصلة على مجال I

*) f رتيبة قطعا على I

*) $f(I)=J$

فإن f تقابل من I نحو J

وبالتالي f تقبل دالة عكسية $f^{-1}:J\to I$ ولدينا:

$$(\forall x\in J)(\forall y\in I): f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$$

2) a) الدالة f^{-1} متصلة على J

b) الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على J ولها نفس رتابة الدالة f .

c) في م.م.م المنحنيان C_f و $C_{f^{-1}}$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول $(\Delta): y=x$.

3) اشتقاق الدالة f^{-1} .

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق ورتيبة قطعا على مجال I و $(\forall x\in I): f'(x)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$

و $(\forall x\in J):\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

IV) دالة الجذر ن الرتبة n $(n\in\mathbb{N}^*)$

1) تعريف: لكل x من $\mathbb{R}^+$ العدد $\sqrt[n]{x}$ هو العدد y من IR^+ الذي يحقق $y^n=x$.

مثال: *) $\sqrt[4]{16}=2$ لأن $2^4=16$ و $2\geq 0$.

*) $(-2)^4=16$ لكن $\sqrt[4]{16}\neq -2$ لأن $-2\notin\mathbb{R}^+$

2) خاصيات

a) الدالة $\sqrt[n]{}$ معرفة على $\mathbb{R}^+$

b) $(\forall x\in\mathbb{R}^+):\sqrt[n]{x}\geq 0$

c) $(\forall x,y\in\mathbb{R}^+):$ *) $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$
*) $\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x<y$.

d) $(\forall x,y\in\mathbb{R}^+):$ *) $x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$
*) $x^n<y^n\Leftrightarrow x<y$.

e) إذا كان n فردي فإن: $(\forall x,y\in\mathbb{R}):$ *) $x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$
*) $x^n<y^n\Leftrightarrow x<y$

f) إذا كان n زوجي فإن: $(\forall x,y\in\mathbb{R}):$ *) $x^n=y^n\Leftrightarrow |x|=|y|$
*) $x^n<y^n\Leftrightarrow |x|<|y|$

g) *) $(\forall x\geq 0).\sqrt[n]{x^n}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$

*) إذا كان n زوجي $(\forall x\in IR):\sqrt[n]{x^n}=|x|$

h) ليكن n و p من IN^* و a و b من $\mathbb{R}^+$

*) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

*) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$; $\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{a}$

*) $(b>0)\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$

*) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[p]{a}=\sqrt[np]{a^{n+p}}$

i) *) $\left(n\in\mathbb{N}^*,p\in\mathbb{Z}\right)$ $(\forall x>0)$: $x^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{x^p}$

*) إذا كان p زوجي: $(\forall x\in\mathbb{R}):\sqrt[n]{x^p}=|x|^{\frac{p}{n}}$.

ملاحظة:

1) إذا كان $xy>0$ فإن $\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{|x|}\cdot\sqrt[n]{|y|}$ و $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt[n]{|x|}}{\sqrt[n]{|y|}}$

2) *) $(\forall x\geq 0):\sqrt[3]{x^3}=x$ $\begin{cases} x=\sqrt[3]{x^3}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 & ;\ x\geq 0\\ x=-\sqrt[3]{-x^3}=\left(-\sqrt[3]{-x}\right)^3 & ;\ x\leq 0\end{cases}$.

*) $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

$a-b=\dfrac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

j) ليكن a و b من IR_+^* و r و r' من $\mathbb{Q}$

$a^r\cdot a^{r'}=a^{r+r'}$; $\left(a^r\right)^{r'}=a^{rr'}$

$\dfrac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$; $(ab)^r=a^r\cdot b^r$

$\dfrac{1}{a^r}=a^{-r}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$

V) دالة قوس الظل Arc tangente

1) تعريف: لكل x من $\mathbb{R}$ العدد $Arc\tan(x)$ هو العدد y من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ الذي يحقق $\tan(y)=x$.

2) خاصيات:

a) الدالة $Arc\tan$ معرفة على $\mathbb{R}$

b) $(\forall\in\mathbb{R}):-\dfrac{\pi}{2}<Arc\tan x<\dfrac{\pi}{2}$

c) $(\forall x\in\mathbb{R})\tan\left(Arc\tan x\right)=x$

d) $\left(\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\right):Arc\tan\left(\tan(x)\right)=x$

e) $(\forall x,y\in\mathbb{R}):$ *) $Arc\tan x=Arc\tan y\Leftrightarrow x=y$
*) $Arc\tan x<Arc\tan y\Leftrightarrow x<y$.

f) $\left(\forall x,y\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\right):$ *) $\tan x=\tan y\Leftrightarrow x=y$
*) $\tan x<\tan y\Leftrightarrow x<y$

g) الدالة arctan فردية يعني :

$(\forall x\in\mathbb{R}):Arc\tan(-x)=-Arc\tan(x)$

h)

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$Arc\tan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

ملاحظة

a) لكي نبين أن $a=b$ يكفي أن نبين مثلا أن $\tan(a)=\tan(b)$ و $a,b\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

أو نستعمل الإستدلال بالتكافئات المتتالية .

b) لكي نبين أن $\arctan(a)=b$ يكفي أن نبين مثلا أن $\tan(b)=a$ و $b\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

الثانية ع ت	دراسة الدوال ملخص الدرس	ح.بوعيون

I- الاشتقـــــــــــاق

1) تعاريف

a) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$ ونكتب $f'(x_0)=l$.

b) تكون f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 إذا كان $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$ ونكتب $f'_d(x_0)=l$.

c) تكون f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كان $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$ ونكتب $f'_g(x_0)=l$.

d) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين ويسار x_0 و $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.

2) التأويل الهندسي.

a) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى c_f يقبل مماسا (T) في النقطة $M(x_0,f(x_0))$ معاملة الموجه $f'(x_0)$ معادلته $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

b) إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس (T_1) على يمين $M(x_0,f(x_0))$ معاملة الموجه $f'_d(x_0)$ معادلته $(T_1): y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للاشتقاق على اليسار.

d) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأعلى على يمين $A(x_0,f(x_0))$.

e) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأسفل على يمين $A(x_0,f(x_0))$.

f) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأسفل على يسار $A(x_0,f(x_0))$.

g) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأعلى على يسار $A(x_0,f(x_0))$.

ملاحظة:

*) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f يمر بشكل عادي من النقطة $M(x_0,f(x_0))$ (لا ينكسر).

*) وإذا كانت f غير قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f (ينكسر) في النقطة $M(x_0,f(x_0))$ ويكون زاوية.

3) اشتقاق مركب دالتين

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن gof قابلة للاشتقاق على I و

$$\boxed{(\forall x\in I)\quad (gof)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)}$$

4) اشتقاق الدالة العكسية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق ورتيبة قطعا على مجال I و $(\forall x\in I): f'(x)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$ و

$$\boxed{(\forall x\in J): \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}\ .$$

5) الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية.

1) $(a)'=0$ $\quad(a\in\mathbb{R})$	12) $(f+g)'=f'+g'$
2) $(x)'=1$	13) $(af)'=af'$
3) $(ax)'=a$	14) $(f\cdot g)'=f'g+fg'$
4) $(x^r)'=rx^{r-1}$ $\quad r\in\mathbb{Q}$	15) $(f^r)'=rf'\cdot f^{r-1}$
5) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	16) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$
6) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	17) $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$
7) $\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	18) $(\sin x)'=\cos x$
8) $\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{3\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)^2}$	19) $(\cos x)'=-\sin x$
9) $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$	20) $(\tan x)'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
10) $(Arc\tan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	21) $\left(\sin(u(x))\right)'=u'(x)\cos(u(x))$
11) $\left(Arc\tan(u(x))\right)'=\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	22) $\left(\cos u(x)\right)'=-u'(x)\sin(u(x))$
23) $\left(\tan(u(x))\right)'=u'(x)\left(1+\tan^2(u(x))\right)$	

ملاحظة:

a) لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .
الدالة $f(x)=\sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على $D_f-\{x/u(x)=0\}$.

b) إذا كانت f دالة تغير الصيغة في x_0 أو إذا كان الحد الموجود تحت الجذر ينعدم في x_0 . يجب دراسة اشتقاق f في x_0 باستعمال معدل التغير.

(6) رتابة دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

a) تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان:

$(\forall x\in I)\ \ f'(x)\geq 0$.

b) تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان:

$(\forall x\in I)\ \ f'(x)\leq 0$.

c) تكون f ثابتة على I إذا وفقط إذا كان:

$(\forall x\in I)\ \ f'(x)=0$.

(7) مطارف دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. يكون للدالة f'' مطرافا في x_0 إذا وفقد إذا كانت f' تنعدم وتغير الإشارة في x_0.

(8) التقعر:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I.

a) يكون C_f محدبا " $\cup$ " إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\geq 0$.

b) يكون C_f مقعرا " $\cap$ " إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\leq 0$.

(9) نقطة انعطاف.

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I وليكن $x_0\in I$.
تكون النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كانت f'' تنعدم وتغير الإشارة في x_0.

ملاحظة:

a) إذا كانت f تنعدم ولا تغير الإشارة في x_0 فإن النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس في هذه النقطة موازيا لمحور الأفاصيل

b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف أو دراسة التقعر نحسب $f''(x)$ وندرك إشارتها.

II- التمثيل المبياني لدالة

(1) محور تماثل – مركز تماثل.

a) يكون المستقيم $(\Delta).x=a$ محور تماثل المنبنى C_f إذا وفقط إذا كان:
*) لكل x من D_f $\quad 2a-x\in D_f$
*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=f(x)$

b) تكون النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل المنحنى C_f إذا وفقط إذا كان:
*) لكل x من D_f $\quad 2a-x\in D$
*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=2b-f(x)$

(2) الفروع اللانهائية.

a) تعريف

نقول إن C_f يقبل فرعا لا نهائيا إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

b) تصنيف الفروع اللانهائية

1) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty}$
فإن المستقيم $(\Delta): x=a$ مقارب ل C_f بجوار a.

2) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b}$
فإن المستقيم $(\Delta): y=a$ مقارب ل C_f بجوار ∞.

3) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty}$ نقوم بحساب $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

a) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار ∞.

b) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞.

c) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0}$ نقوم بحساب $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$.

i) إذا كان $\boxed{\lim(f(x)-ax)=b}$
فإن المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقارب ل C_f بجوار ∞.

ii) إذا كان $\boxed{\lim(f(x)-ax)=\infty}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه $y=ax$ بجوار ∞.

ملاحظة:

يكون المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقاربا ل C_f بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان $\lim(f(x)-(ax+b))=0$

ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $(\Delta): y=ax+b$ مقارب أو إذا كانت $f(x)$ تكتب على شكل $f(x)=ax+b+h(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$.

(3) بعض الملاحظات.

a) حلول المعادلة $f(x)=m$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع المستقيم $(\Delta): y=m$.

b) حلول المعادلة $f(x)=0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل.

c) حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f و C_g.

d) حلول المتراجحة $f(x)\leq g(x)$ هي المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g.

e) من أجل دراسة وضع C_f بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة $f(x)-y$

*) إذا كان $f(x)-y\geq 0$ فإن C_f يوجد فوق (Δ).

*) إذا كان $f(x)-y\leq 0$ فإن C_f يوجد تحت (Δ).